PRACA, MOC, ENERGIA

PRACA

Praca wykonana pod wpływem stałej siły:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = F \cdot r \cdot cos\alpha$$

Praca wykonana przez stałą siłę jest iloczynem skalarnym tej siły i wektora przemieszczenia $\vec{r}$!

Kąt α może przyjmować wartości różne od 0, czyli kierunek siły nie musi pokrywać się z kierunkiem ruchu!

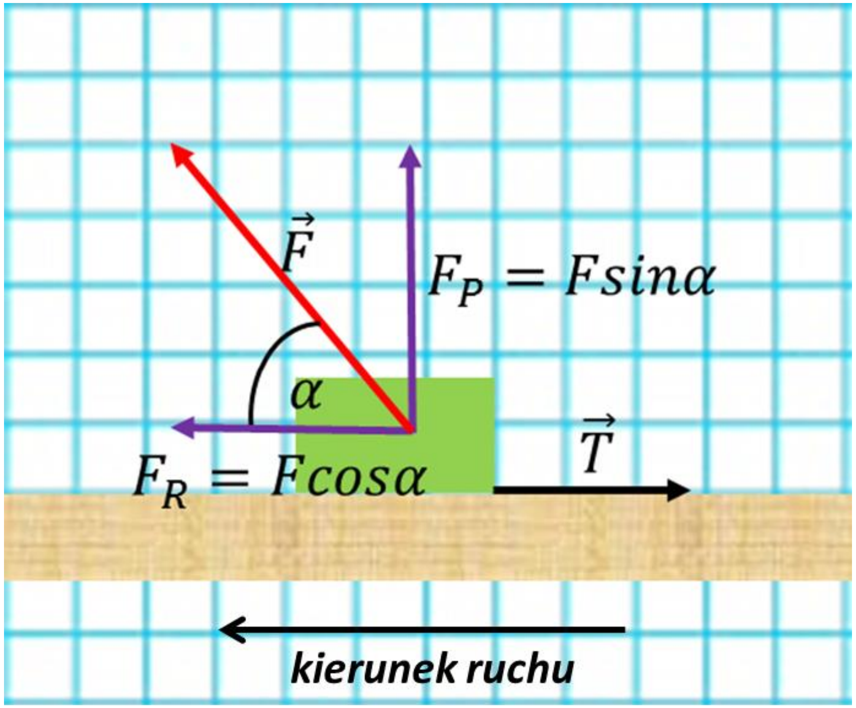
Jednostką pracy w układzie SI jest $[J] = [N \cdot m]$.

$$W = W_R + W_T + W_P$$

$$W_P = F_P \cdot s \cdot cos90° = 0$$
$$W_P = 0$$

$$W = Fcos\alpha \cdot s \cdot cos0° + T \cdot s \cdot cos180°$$

$$W = F_R \cdot s - T \cdot s$$



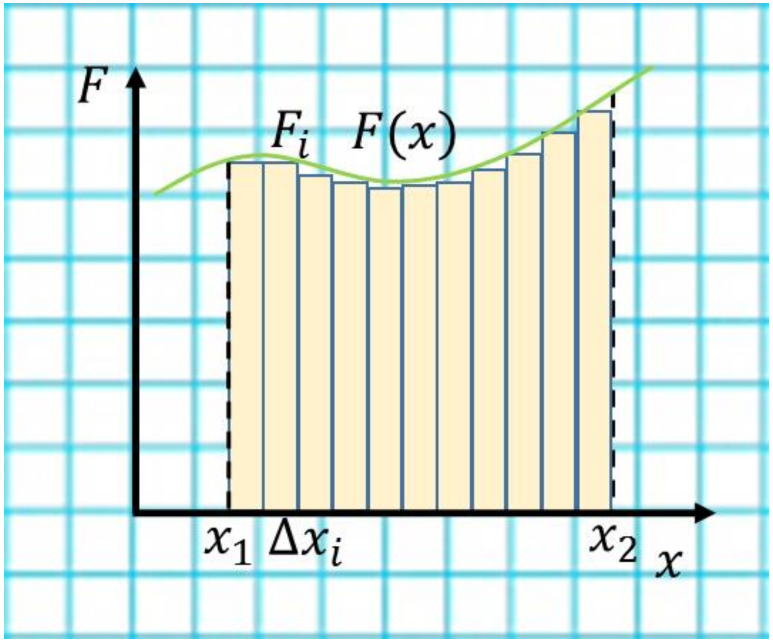
Praca może być dodatnia (jeśli $\alpha < 90°$) lub ujemna (jeśli $\alpha > 90°$)!

Praca siły tarcia (W_T) jest ujemna!

Jeżeli siła jest prostopadła do przesunięcia ($\alpha = 90°, cos\alpha = 0$), to praca przez nią wykonana jest równa 0!

Praca wykonana przez siłę zmienną (ruch w jednym wymiarze):

Dzielimy całkowite przemieszczenie $\Delta x = x_2 - x_1$ na n odcinków Δx_i, na których siła jest w przybliżeniu stała. Elementarna praca wynosi wówczas:



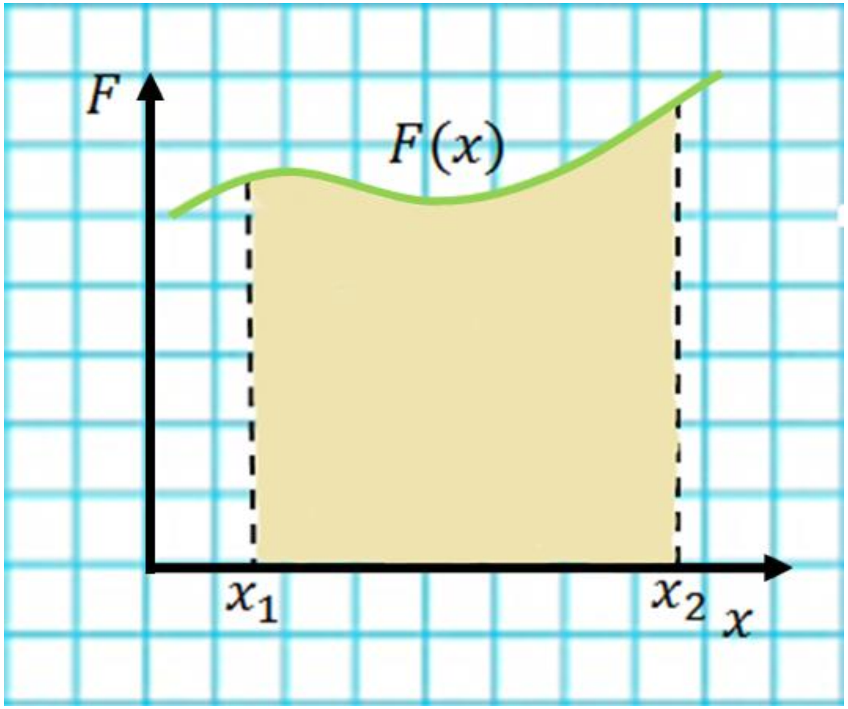
$$W_i = F_i \cdot \Delta x_i$$

Całkowita praca stanowi sumę przyczynków W_i:

$$W = \sum_i^n W_i = \sum_i^n F_i \cdot \Delta x_i$$

Liczenie pracy jest równoważne liczeniu sumy powierzchni prostokątów o podstawie Δx_i i wysokości F_i!

Im większe n (mniejsze Δx_i), tym F_i bliższe wartości $F(x)$ i uzyskana w wyniku obliczeń praca jest bliższa wartości rzeczywistej.



Kiedy $\Delta x_i \to 0$:

$$W = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$$

Pole powierzchni pod krzywą $F(x)$ jest równe liczbowo pracy wykonanej przez siłę na odcinku $x_1 - x_2$!

Całkowanie funkcji $F(x)$ w granicach od x_1 do x_2 jest równoważne wyznaczaniu pola powierzchni pod krzywą $F(x)$ w zadanym przedziale!

Żeby obliczyć pracę wykonaną przez zmienną siłę trzeba alternatywnie:

1. Obliczyć całkę $\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$ (ewentualnie poszukać rozwiązania w tablicach),

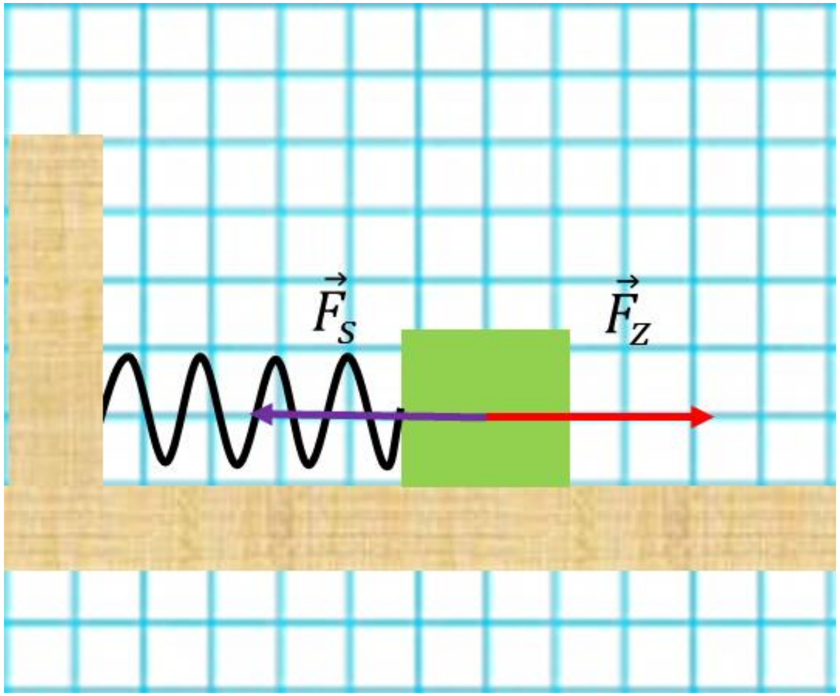
2. Obliczyć pole powierzchni pod krzywą $F(x)$ w granicach $x_1 - x_2$.

Praca wykonana przy rozciąganiu sprężyny:

$$\vec{F}_s = -k \cdot \vec{x}$$

$$\vec{F}_z = -\vec{F}_s = k \cdot \vec{x}$$

$$W = \int_0^x (k \cdot x)dx = \left|\frac{1}{2}k \cdot x^2\right|_0^x = \frac{1}{2}kx^2$$



ENERGIA

Energia – zdolność układu do wykonania pracy

FORMY ENERGII

- **Światło**
- **Ciepło**
- **Energia ruchu**
- **Energia pola:**
  - grawitacyjnego
  - elektrostatycznego
  - magnetycznego
  - sił jądrowych
  - sił sprężystości

ENERGIA KINETYCZNA

Energia kinetyczna ciała:

$$E_k = \frac{1}{2} m V^2$$

Jednostką pracy i energii w układzie SI jest $[J] = [N \cdot m]$

Twierdzenie o pracy i energii:

Praca wykonana przez siłę F działającą na ciało o masie m jest równa zmianie energii kinetycznej tego ciała.

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} m a_x dx = \int_{x_1}^{x_2} m \frac{dV_x}{dt} dx = m \int_{x_1}^{x_2} V_x dV_x =$$

$$= \left[\frac{m {V_x}^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = E_{K2} - E_{K1} = \Delta E_K$$

MOC

Moc – ilość wykonanej pracy (lub przekazanej energii) do czasu, w jakim została ona wykonana (przekazana).

Moc średnia:

$$\bar{P} = \frac{W}{t}$$

Jeśli $F = const$:

$$\bar{P} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot \bar{V}$$

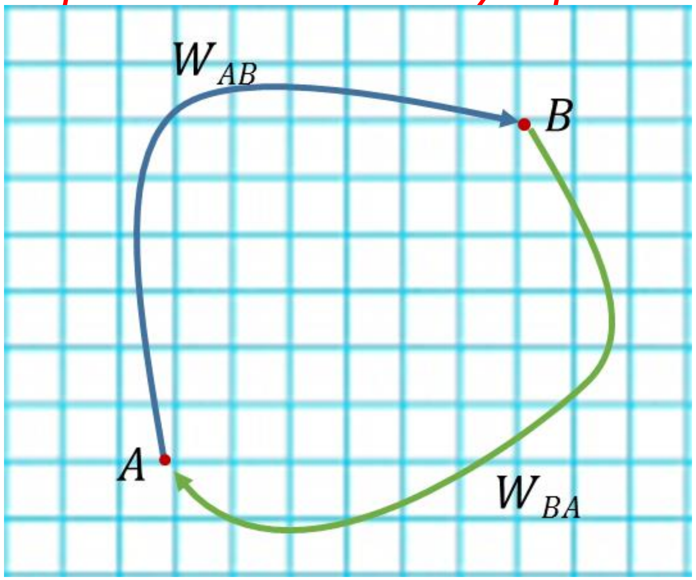
Moc chwilowa:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Jednostką mocy w układzie SI jest $[W] = [\frac{J}{s}]$.

SIŁY ZACHOWAWCZE I NIEZACHOWAWCZE

Siła jest zachowawcza, jeśli wykonana przez nią nad punktem materialnym praca na dowolnej drodze zamkniętej jest równa 0!



$$W_{AB} + W_{BA} = 0$$

np. siła grawitacyjna, sprężystości

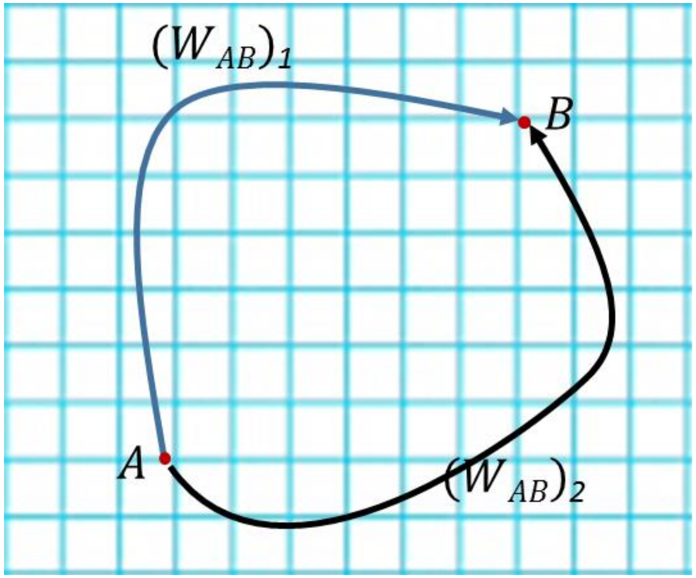
Siła jest niezachowawcza jeżeli praca wykonana przez tę siłę nad punktem materialnym, który porusza się po dowolnej drodze zamkniętej nie jest równa zeru.

$$W_{AB} + W_{BA} \neq 0$$

np. siła oporu powietrza, siła tarcia

Definicja alternatywna siła zachowawczych i niezachowawczych:

Praca wykonana przez siłę zachowawczą nad punktem materialnym poruszającym się między dwoma punktami zależy tylko od położenia punktów, a nie zależy od łączącej je drogi!



$$(W_{AB})_1 = (W_{AB})_2$$

Siłę nazywamy niezachowawczą jeżeli praca wykonana przez nią zależy od drogi łączącej punkty między którymi ciało się porusza!

$$(W_{AB})_1 \neq (W_{AB})_2$$

ENERGIA POTENCJALNA

Podczas ruchu ciała zachodzącego na skutek siły zachowawczej (grawitacyjna, sprężystości) energia kinetyczna ulega zmianie (malała, rosła), tak aby w cyklu zamkniętym powrócić do wartości początkowej.

Aby zmiany energii kinetycznej opisać wprowadzamy pojęcie energii potencjalnej!

Zmianie energii kinetycznej ciała o wartość ΔE_K towarzyszy zmiana energii potencjalnej ΔE_P tego ciała równa co do wartości ale przeciwnego znaku. Suma tych zmian:

$$\Delta E_K + \Delta E_P = 0$$

Skoro:

$$\Delta E_K = -\Delta E_P$$

to:

$$E_K + E_P = const$$

Suma energii kinetycznej i potencjalnej pozostaje stała!

ZASADA ZACHOWANIA ENERGII

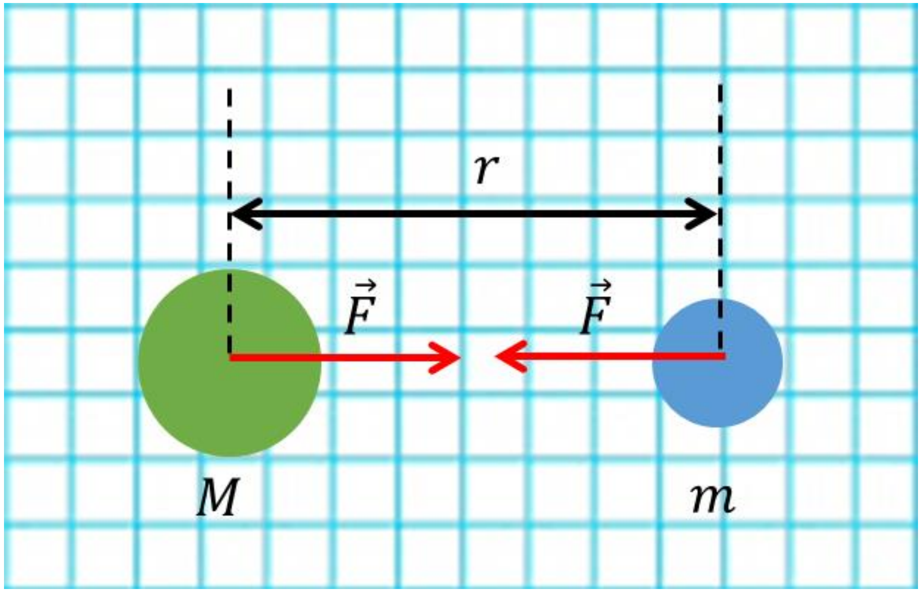
Suma energii kinetycznych i potencjalnych ciała o masie m w dowolnym punkcie przestrzeni jest stała, jeśli w tej przestrzeni działają tylko siły zachowawcze!!!

ENERGIA POLA GRAWITACYJNEGO (przykład)

Prawo powszechnego ciążenia – między dowolną parą ciał posiadających masy pojawia się siła przyciągająca, która działa na linii łączącej ich środki mas, a jej wartość rośnie z iloczynem ich mas i maleje z kwadratem odległości.

Skalarnie:

$$F(r) = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$



Gdzie:
G – stała grawitacji,
M, m – masy ciał,
r – odległość między środkami mas.

Natężenie pola grawitacyjnego – siła, z jaką dane pole grawitacyjne działa na jednostkową masę.

Skalarnie:

$$\gamma(r) = \frac{F}{m} = G\frac{M}{r^2}$$

Natężenie pola grawitacyjnego na powierzchni Ziemi:

$$\gamma(R_Z) = G\frac{M_Z}{{R_Z}^2}$$

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \qquad M_Z = 6 \cdot 10^{24}\ kg \qquad R_Z = 6{,}37 \cdot 10^6\ m$$

$$\gamma(R_Z) = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(6{,}37 \cdot 10^6)^2} \approx 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$$

Energia pola grawitacyjnego – energia potencjalna ciała o masie *m* w polu siły grawitacji wytworzonym przez masę *M*

Siła grawitacyjna jest siłą zachowawczą!

$$\Delta E_P = -\Delta E_K = -W_{12}$$

1 – nieskończoność

2 – dany punkt pola

$$\Delta E_P = E_P(r) - E_P(\infty) = -W_{\infty r} = -\int_{\infty}^{r} F(r)dr = -\int_{\infty}^{r} -\frac{GMm}{r^2}dr$$

$$= GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} = -\frac{GMm}{r}$$

Znak „-” wynika z tego, że siła grawitacyjna ma przeciwny zwrot do *r*, czyli odległości od środka Ziemi.

$$E_P(\infty) = 0$$

$$E_P(r) = -\frac{GMm}{r}$$

Potencjał pola grawitacyjnego – wielkość skalarna opisująca pole

$$V(r) = \frac{E_P(r)}{m} = -\frac{GM}{r}$$

Potencjał opisuje pole sił niezależnie od ciała, na które te siły działają!

ZASADA ZACHOWANIA ENERGII MECHANICZNEJ (przykład)

II prędkość kosmiczna – minimalna prędkość, jaką należy nadać ciału o masie m, aby oddaliło się nieskończenie daleko od ciała niebieskiego.

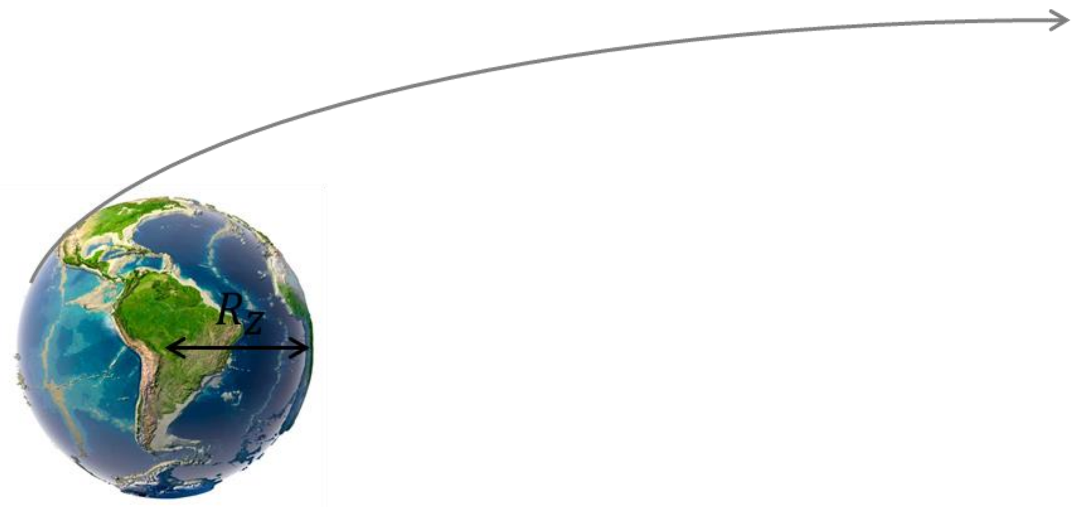
$$E_P(R) + E_K(R) = E_P(\infty) + E_K(\infty)$$

$$E_P(\infty) = 0, E_K(\infty) \geq 0$$

$$E_P(R) + E_K(R) = 0$$

$$-\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2} m {V_{II}}^2 = 0$$

$$ {V_{II}}^2 = \frac{2GM}{R}$$



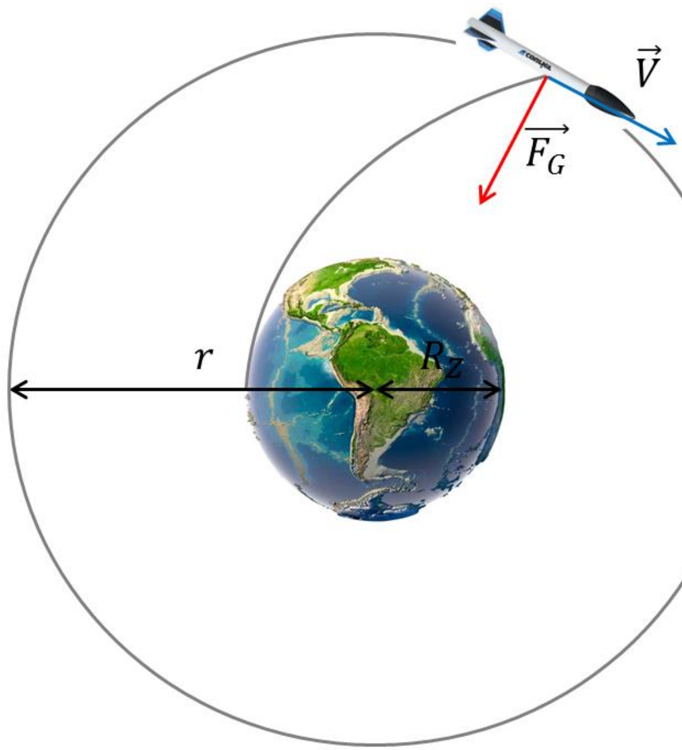
$$V_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

II prędkość kosmiczna zależy od masy i promienia ciała niebieskiego!

Na Ziemi:

$$V_{II} = \sqrt{\frac{2GM_Z}{R_Z}} = 11{,}19\ \frac{km}{s}$$

I prędkość kosmiczna – najmniejsza pozioma prędkość, jaką należy nadać ciału względem przyciągającego je ciała niebieskiego, aby ciało to poruszało się po zamkniętej orbicie (stało się satelitą ciała niebieskiego). Dla ciała niebieskiego o kształcie kuli, orbita będzie orbitą kołową o promieniu równym promieniowi planety.



$$F_G(R) = F_O(R)$$

$$\frac{GMm}{(R)^2} = \frac{mV_I{}^2}{R}$$

$$V_I{}^2 = \frac{GM}{R}$$

$$V_I = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Dla Ziemi: $V_I = 7{,}91\ \frac{km}{s}$, *dla Księżyca:* $V_I = 1{,}68\ \frac{km}{s}$, *dla Słońca:* $V_I = 436{,}74\ \frac{km}{s}$.

III prędkość kosmiczna – prędkość początkowa potrzebna do opuszczenia Układu Słonecznego. Przy powierzchni Ziemi wynosi ok. 42 km/s. Ze względu na ruch obiegowy Ziemi wokół Słońca, wystarczy przy starcie z jej powierzchni w kierunku zgodnym z tym ruchem nadać obiektowi dodatkową prędkość 16,7 km/s (względem poruszającej się Ziemi), aby opuścił on Układ Słoneczny.

IV prędkość kosmiczna – prędkość początkowa potrzebna do opuszczenia Drogi Mlecznej. Prędkość ta wynosi ok. 550 km/s, lecz wykorzystując fakt ruchu Słońca dookoła środka Galaktyki, wystarczy obiektowi nadać prędkość około 330 km/s w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu obiegowego Słońca względem centrum Galaktyki, by mógł on ją opuścić.